積分の計算

(はじめに)

このテキストは積分計算を最速でやるために作成したものです。このテキストで使用するテクニックは，教科書に載っていないだけでなく，参考書や問題集にも載っていないものもあります。それは，定松自身の発明による解法があるからです。これにより１０分かかる問題が１０秒に変わることもあります。

入試では制限時間があります。難関校の入学試験では，「いかに早く解けるか」は「解けるか」と同じくらい重要です。このテキストで想像をはるかに超えたスピードを身に付けられるはずです。

つぎの積分計算をやってみてください。ただし，すべて暗算でやってください。一切の筆記用具を使ってはいけません。手を動かしてもいけません。何者かに拉致されて，手を後ろで縛られた状態で，この問題を解いていると思ってください。「そんな状態で数学をやる？」というツッコミは受け付けません。定松先生なら，その状態で他にやることがないなら，頭の中だけでできる数学の問題をやっているはずですから！

（１）$\int \frac{x+7}{(x+1)(x-1)(x-2)}dx$

（２）$\int x^3 \cos x \, dx$

（３）$\int (\log x)^3 \, dx$

（４）$\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

（５）$\int x\sqrt[3]{3x^2-2} \, dx$

「これらを暗算で？　無理じゃない！」と思っている人はいませんか。もしくは,「特殊な才能がある人はできるのかもね！」と思っている人はいませんか。違うのです。私の教室で学んだ生徒さんは，みんなそれができるようになっていますので，特殊能力，特別な才能，独特の数学的センスなんていりません。だれでも，それぞれの積分計算にふさわしいテクニックを学べば，暗算で計算できるようになれます。

（１）は，部分分数分解を必要としますが，分母が３つの因数からなっていて面倒です。このタイプは，瞬間部分分数分解法（《瞬分 ^{3}》と略しています）を使うと，暗算で計算ができます。第２章で解説します。

（２）は，部分積分 1A 型（《部 1A》と略しています）に属する問題です。このタイプは，連鎖式部分積分法 type A（《連 A》と略しています）を使うと，暗算で計算ができます。第３章で解説します。

（３）は，部分積分 1B 型（《部 1B》と略しています）に属する問題です。このタイプは，連鎖式部分積分法 type B（《連 B》と略しています）を使うと，暗算で計算ができます。第３章で解説します。

（４）は，部分積分２型（《部２》と略しています）に属する問題です。このタイプは，ミッケ法（《ミッケ》と略しています）を使うと，暗算で計算ができます。第３章で解説します。

（５）は，置換積分１型（《置１》と略しています）に属する問題です。このタイプは，ビンヅメ置換積分法（《ビン置》と略しています）を使うと，暗算で計算ができます。第４章で解説します。

この章では，それぞれの計算問題に，理想とする所要時間が書かれております。これは，私の教室で指導を受けた難関大学受験生たちの最短時間の標準です。私は，生徒の最短時間の半分くらいの時間で解けますが，過去に指導した生徒の中には，私より速く解く者もいました。この生徒の速さは参考になりませんので《理想とする所要時間》を算出するのに参考にはしませんでした。したがって，《理想とする所要時間》は，私(定松勝幸)と私よりも解くスピードが速い生徒を除外して，私の教室から東京大学・京都大学・超難関医学部に合格した生徒の最速時間です。

学習していく途中の過程では，これより多くの時間がかかっても気にしないでください。特に，項目（式変形，部分積分，置換積分など）ごとの授業では，その項目に従った解法をしますので，私も(注)の理想所要時間を超えることがあります。実は，教科書では「部分積分の典型問題」「置換積分の典型問題」とされている問題でも，その項目を無視して解いた方が速いことがあるのです。そのため，項目に関係なく解いた場合の最終目標所要時間を書いております。また, (注)の「答えのみなら」の意味は，論述を必要としない穴埋め問題として出題された場合のことです。

授業では，以下の略記号を使うことにしています。これらの記号は，私(定松勝幸)が定義したものですので，実際の試験では使用しないでください。私が講義をするとき，略記号があったほうが便利なので使っております。

《1 ビン》 1 次関数のビンヅメを作る
《次下》三角関数の次数を 1 次式まで下げる
《スラ∫》スライディング∫法
《瞬分³》瞬間部分分数分解法
《高組》高次組立除法
《逆組》逆向き組立除法
《偶奇》偶関数・奇関数の性質を利用する
《部 1 A》部分積分 1 A 型
《部 1 B》部分積分 1 B 型
《部 2》部分積分 2 型
《連 A》連鎖式部分積分法 type A
《連 B》連鎖式部分積分法 type B
《ミッケ》ミッケ法
《置 1》置換積分 1 型
《置 2》置換積分 2 型
《置 1.5》置換積分 1.5 型
《置変》置換積分変則型
《ビン置》ビンヅメ置換積分法
《図》図形的意味を考える
《漸》漸化式を利用する
《等積》等積変形

第１章　式変形が不要な基本計算

この章では,『積分の基本計算』を学びます。
積分の計算はさまざまな方法がありますが，まずは,「そのままで積分計算ができるもの」を講義します。これができるためには，微分の計算が正しくできることが前提になります。そのため，微分の計算の簡単なチェックをしてから，積分の問題に入ります。

【１】次の計算をしなさい。

（１）$\int x^n\,dx$ (nは実数の定数)

（２）$\int dx$

（３）$\int \sin x\,dx$

（４）$\int \cos x\,dx$

（５）$\int \tan x\,dx$

（６）$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

（７）$\int e^x\,dx$

（８）$\int a^x\,dx$ (aは正の定数)

【２】次の計算をしなさい。

（１）$\int (2x-3)^5\,dx$

（２）$\int \frac{3}{(3x+5)^2}\,dx$

（３）$\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}\,dx$

【３】次の計算をしなさい。

（１）$\int \sqrt{5x+1}\,dx$

（２）$\int \sqrt[3]{3x-2}\,dx$

（３）$\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}\,dx$

（４）$\int \frac{5}{\sqrt[5]{2x+5}}\,dx$

【４】次の計算をしなさい。

（１）$\int \sin(2x-5)\,dx$

（２）$\int \cos(4x+3)\,dx$

（３）$\int \tan(5x-3)\,dx$

（４）$\int \frac{3}{\cos^2(3x+1)}\,dx$

【５】次の計算をしなさい。

（１）$\int e^{2x+5}\,dx$

（２）$\int \left(\sqrt{3}\right)^{2x-3}\,dx$

（３）$\int \frac{2}{e^{4x+3}}\,dx$

（４）$\int \frac{10}{5^{4x+3}}\,dx$

【６】次の計算をしなさい。

（１）$\int_{\log 2}^{\log 3} e^{2x}\,dx$

（２）$\int_{0}^{\log_2 3} 4^{x}\,dx$

（３）$\int_{0}^{\log 2} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

（４）$\int_{1}^{2} \frac{e^{2x}}{e^{2x-1}+1}\,dx$

第２章　式変形による積分計算

この章では,『式変形による積分の計算』を学びます。
積分の計算はさまざまな方法がありますが，まずは,｢そのままで積分計算ができるもの」と「式変形（部分積分や置換積分は使わない）により積分計算ができるもの」を講義します。ただし，この中には他のやり方（部分積分，置換積分，漸化式の利用など）を用いたほうが早く解ける問題も入れてありますので，式変形にこだわらず，早く解けるやり方でやってもらってかまいません。
（注）の時間は，最も早く解ける解法を選んだときの生徒の最短時間です。
この章では，定松先生が発明した『瞬間部分分数分解法』が登場します。

【１】無理関数の積分計算の方法について簡単に述べてください。

【２】次の計算をしなさい。

（１）$\int_{-\frac{3}{2}}^{0} x\sqrt{2x+3}\,dx$

（２）$\int_{2}^{3} (7x-6)\sqrt[3]{x-2}\,dx$

（３）$\int_{1}^{2} (x-2)^2\sqrt{x-1}\,dx$

（注）答えのみなら３題で１分。

【３】次の計算をしなさい。

（１）$\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\,dx$

（２）$\int_{0}^{\pi} \sin^3 x\,dx$

（３）$\int_{0}^{\pi} \sin^4 x\,dx$

（４）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$

（５）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\cos x\,dx$

（注）答えのみなら５題で１分

【５】部分分数分解について簡単に述べなさい。

【６】分数関数の積分の計算方法について簡単に述べてください。

【７】次の計算をしなさい。（答えのみでよい）

（１）$\int_1^2 \frac{4x-5}{(x+1)(2x-1)}dx$

（２）$\int_0^1 \frac{2x^3+5x^2+6x+5}{(x+1)(x+2)}dx$

（３）$\int_0^1 \frac{2x^2+8x+5}{x^2+3x+1}dx$

（４）$\int_0^1 \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$

（５）$\int_2^5 \frac{3x+9}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$

（６）$\int_2^4 \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$

（７）$\int_{-1}^0 \frac{(x+1)(x+4)}{(x+2)^3}dx$

（８）$\int_2^4 \frac{3x^2-x+4}{(x+1)(x-1)^2}dx$

（９）$\int_0^1 \frac{3x^2-11}{(x+1)^3(x+2)}dx$

（注）答えのみなら９題で８分。

第３章　部分積分による積分計算

この章では,『積分の計算』において『部分積分による積分の計算』を講義します。「部分積分を用いて計算することができる」であり,「部分積分を使わないと計算できない」ではありませんから，部分積分を使わない方が早く解ける問題もたくさん入っています。したがって，部分積分にこだわらないでください。講義では，部分積分の利点，欠点を述べ，それを使う使わないの判断方法も講義します。さらに，この章では，定松先生が発明した『連鎖式部分積分法 type A』『連鎖式部分積分法 type B』『ミッケ法』『スライディング∫法』といった瞬間技も飛び出します。

【１】「部分積分によって積分計算を行うときはどんなときか」について簡単に述べてください。

【２】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$

（２）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+2)\sin x dx$

（３）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\sin x dx$

（４）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x\, dx$

（５）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\, dx$

（注）答えのみなら５題で２分

【３】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^1 e^x(x^2+2x+3)\, dx$

（２）$\int_0^1 e^{-x}(x^3-3x^2-1)dx$

（３）$\int_0^1 e^{2x}(2x-1)\, dx$

（４）$\int_0^1 3^x(2x+3)dx$

（注）答えのみなら４題で１分３０秒

【４】次の計算をしなさい。

（１）$\int_{e}^{e^2} \log x\, dx$

（２）$\int_{1}^{e} (\log x)^4 dx$

（３）$\int_{1}^{e} x^3 (\log x)^2 dx$

（４）$\int_{1}^{e} \frac{1}{x^3} (\log x)^2 dx$

（注）答えのみなら４題で２分

【５】次の計算をしなさい。

（１）$\int_{0}^{\pi} e^{-x} \sin x\, dx$

（２）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{x} \cos 2x\, dx$

（３）$\int_{0}^{\pi} e^{3x} \sin 2x\, dx$

（注）答えのみなら３題で２分

【６】次の計算をしなさい。

（１）$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$

（２）$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta) dx$

（３）$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 dx$

（４）$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^3(x-\beta)^2 dx$

（注）答えのみなら４題で３０秒。

第４章　置換積分による積分計算

　この章では、『積分の計算』において『置換積分』を学びます。置換積分を正しく理解すると，そのうちの多くは「置換積分をしない方が早く計算できる」という事実にたどり着きます。置換積分として出題されている問題では，「いかに置換積分を使わないで計算するか」が勝負という，皮肉な話です。講義では，ここを深く解明します。この章では,『ビンヅメ置換積分法』が登場します。

【１】「置換積分はどんな場合に使うのか」について簡単に述べてください。

【２】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$

（２）$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

（３）$\int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

（４）$\int_0^1 xe^{x^2}dx$

（５）$\int_1^e \frac{(\log x)^3}{x}dx$

（６）$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log x}dx$

（注）答えのみなら６題で１分３０秒

【３】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\,dx$

（２）$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x dx$

（３）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

（４）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

（５）$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$

（注）答えのみなら５題で２分

【４】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$

（２）$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

（３）$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$

（４）$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$

（５）$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

（６）$\int_0^2 \frac{1}{1-x+x^2}dx$

（注）答えのみなら６題で４分

【５】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}dx$

（２）$\int_1^{\pi^3+1} \sin\sqrt[3]{x-1}\,dx$

（３）$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}dx$

（４）$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$

（注）答えのみなら４題で４分

【６】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$

（２）$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}dx$

（注）答えのみなら２題で１０分

第５章　漸化式による積分計算

この章では,『積分の計算』において，漸化式を利用します。２次試験での積分計算の最重要問題のひとつと言っていいでしょう。その割には，仕組みは単純で，それを理解しさえすれば簡単にできるようになります。『積分の漸化式』で難しいのは，積分計算への応用ではなく，無限級数との融合や不等式への応用です。したがって，今回の内容は非常に初歩的な問題ばかりで，すらすらできないとまずい内容です。

【１】積分の計算のために漸化式をつくりたいとき，どうすれば作ることができるかを簡単に述べてください。

【２】（１）$I_n=\int(\log x)^n\,dx$ (n は負でない整数) とするとき，I_n を I_{n-1} $(n\geqq 1)$ を用いて表しなさい。

（２）$\int(\log x)^3\,dx$ を求めなさい。

（注）答えのみなら２題で２分

【３】$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ (m,n は負でない整数の定数) とするとき，次の問いに答えなさい。

（１）$I(m,n)$ を $I(m+1,n-1)$ $(m\geqq 0, n\geqq 1)$ を用いて表しなさい。

（２）$I(m,n)$ を求めなさい。

（注）答えのみなら２題で２分

【４】$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$ (m,n は自然数) を求めなさい。

（注）答えのみなら１分

【５】（１）$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$（$n$ は負でない整数）とするとき，I_n を I_{n-2}（$n \geqq 2$）を用いて表しなさい。

（２）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$ を求めなさい。

（３）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx$ を求めなさい。

（注）答えのみなら３題で２分

【６】次の積分の計算をしなさい。

（１）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x\,dx$

（２）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^7 x\,dx$

（３）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\,dx$

（注）答えのみなら３題で１分３０秒

【７】（１）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx$ を求めなさい。

（２）$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$（$n$ は負でない整数）とするとき，I_n を I_{n-2}（$n \geqq 2$）を用いて表しなさい。

（３）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x\,dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7 x\,dx$ を求めなさい。

（注）答えのみなら３題で４分

第６章　変・部・置・漸の総合問題

この章では,『積分の計算』において，式変形だけでできるのか，部分積分が必要なのか，置換積分が必要なのか，漸化式を登場させる方がいいのか，いずれでもない方法でもできるのか，を素早く判断する方法を講義します。中には，複数の方法が可能なものもあり,『どれを使うのが最も早いのかの判断基準』を持っていないと，本番の試験で無駄な計算をしてしまうことになります。ここでは，その判断基準をしっかり学びます。

【１】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$

（２）$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}\,dx$

（３）$\int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}\,dx$

（４）$\int_0^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{2-x^2}\,dx$

（注）答えのみなら４題で１分３０秒

【２】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+3}\,dx$

（２）$\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+4x+3}\,dx$

（３）$\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+4x+4}\,dx$

（４）$\int_{-2}^{-1} \frac{x+5}{x^2+4x+5}\,dx$

（注）答えのみなら４題で２分

【３】次の計算をしなさい。

（１）$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$

（２）$\int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx$

（３）$\int_1^e \frac{\log x}{x^3} dx$

（４）$\int_1^e \frac{\log x}{x^4} dx$

（５）$\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

（注）答えのみなら５題で２分

【４】次の計算をしなさい。

（１）$\int_0^1 \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) dx$

（２）$\int_2^3 x^2 \log(x - 1) dx$

（３）$\int_1^{e^\pi} \sin(\log x) dx$

（注）答えのみなら３題で４分